

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1952 - 007

Enige eigenschappen van een zeker type determinanten

H.J.A. Duparc en W. Peremans



1952

Enige eigenschappen van een zeker type determinanten

door

H.J.A. Duparc en W. Peremans.

Stelling 1. Beschouw een determinant $A = |a_{ij}|$ van de n^e orde met de eigenschappen

$$(1) \quad a_{ij} \leq 0 \text{ voor } i, j = 1, \dots, n \text{ en } i \neq j;$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} \geq 0 \text{ voor } i = 1, \dots, n.$$

Dan is $A \geq 0$.

Bewijs: Voor $n = 1$ is de stelling triviaal. Onderstel dus $n \geq 2$ en neem aan, dat voor determinanten van een orde $\leq n-1$, die bovenstaande twee eigenschappen bezitten, de stelling reeds bewezen is. Stel voor $i = 1, \dots, n$ verder $b_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}$; dan is $b_i \geq 0$; $a_{ii} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik} + b_i$. Substitueert

men deze waarde voor de elementen a_{ii} ($i = 1, \dots, n$), dan gaat A over in een polynoom, dat multilineair is in de grootheden $b_1, \dots, b_n$. De coëfficiënt van het hierin optredende niet negatieve product $b_{\nu_1} \dots b_{\nu_m}$

$(\nu_1, \dots, \nu_m)$ is een combinatie van m der getallen $1, \dots, n$; $1 \leq m \leq n-1$; noem de overige $n-m$ der getallen $1, \dots, n$ $\mu_1, \dots, \mu_{n-m}$ is een hoofd-minor D_{n-m} van A van de orde $n-m$, waarvoor kennelijk eigenschap (1) geldt en met eigenschap (2) is dat ook het geval, want $\sum_{k=1}^{n-m} a_{\mu_i \mu_k} \geq 0$,

omdat $\sum_{k=1}^n a_{ik} \geq 0$ en $a_{ij} \leq 0$ voor $i \neq j$. Wegens inductieonderstelling

is dus de determinant D_{n-m} van de orde $n-m$ zeker ≥ 0 . Verder is $D_0 = 1$

en D_n is een determinant, waarvan de som der elementen van elke rij nul is, dus $D_n = 0$. Derhalve is A als de som van termen, die ≥ 0 zijn, zelf ook ≥ 0 .

Stelling 2. Als een determinant $A = |a_{ij}|$ de eigenschappen

$$(1) \quad a_{ij} \leq 0 \text{ voor } i, j = 1, \dots, n; i \neq j;$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} > 0 \text{ voor } i = 1, \dots, n$$

bezit, is zij positief.

Bewijs: Voeren wij evenals in het bewijs van stelling 1 de grootheden $b_1, \dots, b_n$ in, dan volgt uit (3) dat deze n grootheden alle positief zijn. De determinant A is dan weer een multilineaire vorm in $b_1, \dots, b_n$, waarvan

elke term ≥ 0 is, terwijl de hierin optredende term $b_1 \dots b_n > 0$ is. Derhalve is $A > 0$.

Stelling 3. Laat $A = |a_{ij}|$ een determinant van de orde n zijn, die voldoet aan de relatie (1) en verder aan

$$(4) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} = 0 \text{ voor } i = 1, \dots, h \text{ en } \sum_{k=1}^n a_{ik} > 0 \text{ voor } i = h+1, \dots, n.$$

Dan is A dan en slechts dan gelijk aan nul, als iedere hoofdminor van A , welke ontstaat uit A door daarin elk of sommige der $h+1^e, \dots, n^e$ rij en kolom te schrappen, gelijk is aan nul.

Bewijs: Voeren wij weer, evenals in het bewijs van stelling 1 de grootheden $b_1, \dots, b_n$ in, dan is $b_1 = \dots = b_h = 0$; $b_{h+1} > 0, \dots, b_n > 0$. Is $A = 0$, dan is in A , geschreven als multilineaire vorm in $b_1, \dots, b_n$ dus in $b_{h+1}, \dots, b_n$, elke term gelijk aan nul. Zij M een hoofdminor van A , die ontstaat door enige der $h+1^e, \dots, n^e$ rij en kolom in A te scheppen.

Laat dit de $\nu_1^e, \dots, \nu_m^e$ rij zijn (waarbij dus $\nu_1, \dots, \nu_m$ een combinatie is van m uit de $n-h$ getallen $h+1, \dots, n$ met $m \leq n-h$). Omdat in A de term $b_{\nu_1} \dots b_{\nu_m} M$ optreedt die nul is, is $M = 0$. Is omgekeerd gegeven, dat elke hoofdminor van A nul is, die uit A ontstaat door elke of sommige der $h+1^e, \dots, n^e$ rij te schrappen, dan is in A als multilineaire vorm in $b_{h+1}, \dots, b_n$ elke term nul, dus $A = 0$.

Stelling 4. Als een determinant $A = |a_{ij}|$ voldoet aan de relatie (1) en

$$(5) \quad \sum_{k=0}^n a_{ik} = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

dan is elke hoofdminor van de orde $n-1$ in A positief of nul.

Bewijs: Wegens (5) en (1) is de som der elementen van een rij van een hoofdminor van A zeker ≥ 0 , zodat voor die hoofdminor de voorwaarden van stelling 1 vervuld zijn, waaruit volgt, dat die hoofdminor ≥ 0 is.

Stelling 5. Als een determinant $A = |a_{ij}|$ van de n^e orde de eigenschappen (1) en (5) bezit, dan bezit zij dan en slechts dan een hoofdminor van de orde $n-1$ die nul is, als er een getal h bestaat met $1 \leq h \leq n-1$, zodanig, dat $a_{ij} = 0$ voor $i = i_1, \dots, i_h$; $j = j_{h+1}, \dots, j_n$, waarbij de getallen $i_1, \dots, i_h, j_{h+1}, \dots, j_n$ een permutatie vormen van de getallen $1, \dots, n$.

Bewijs: (1^e deel) Laat allereerst de laatste eigenschap vervuld zijn en dus een getal h met bovengenoemde eigenschap bestaan. Zonder de algemeenheid te schaden, mogen wij aannemen, dat $a_{ij} = 0$ voor $i = 1, \dots, h$ en $j = h+1, \dots, n$. Beschouw een hoofdminor D_{n-1} van de orde $n-1$, die uit A ontstaat door een rij en kolom te schrappen met rangnummer $\geq h+1$. Alweer zonder de algemeenheid te schaden, mogen wij aannemen, dat de n^e rij en kolom geschrapt zijn. Dan is die hoofdminor gelijk aan het product $D_h E_{n-h-1}$, waarin D_h de hoofdminor is van A , die de $1^e, \dots, h^e$ rij bevat en E_{n-h-1} in D_{n-1} de complementaire hoofdminor van D_h . Wegens (5)

en wegens $a_{ij} = 0$ voor $i = 1, \dots, h$ en $j = h+1, \dots, n$ is

$$\sum_{k=1}^h a_{ik} = 0 \text{ voor } i = 1, \dots, h,$$

dus $D_h = 0$, dus $D_{n-1} = 0$.

Opmerking. Wij zien dus tevens, dat A onder de beschouwde voorwaarden ten minste $n-h$ hoofdminoren bezit, die nul zijn. Dat niet elke hoofdminor van A nul is, blijkt b.v. bij de determinant

$$\begin{vmatrix} a & -a & 0 \\ -b & b & 0 \\ -c & -d & c+d \end{vmatrix}$$

waarin a, b, c en d positieve getallen zijn. Hier is $h = 2$, maar de

hoofdminor $\begin{vmatrix} b & 0 \\ -d & c+d \end{vmatrix} \neq 0$. Voegt men aan (5) nog de relaties $\sum_{i=0}^n a_{ik} = 0$

voor $k = 1, \dots, n$ toe, dan kan men geheel als hierboven aantonen, dat wel elke hoofdminor van de orde $n-1$ van A nul is. In dat geval bezit A een rang $\leq n-2$, aangezien alle minoren van de orde $n-1$ van A op grond van (5) gelijk en wel nul zijn. Dit laatste treedt b.v. op als men behalve (5) ook nog eist, dat A symmetrisch is.

Thans gaan we over tot het tweede gedeelte van het bewijs van stelling 5 en onderstellen, dat in de determinant A, die voldoet aan (1) en (5) een hoofdminor van de orde $n-1$ gelijk is aan nul. Wij mogen aannemen, dat dit de hoofdminor D_{n-1} is, die uit A ontstaat door de n^e rij en kolom weg te laten. Indien $a_{in} = 0$ voor $i = 1, \dots, n-1$, dan is de stelling reeds bewezen met $h = n-1$. Indien $a_{in} \neq 0$ voor $i = 1, \dots, n-1$, dan kan wegens $\sum_{k=1}^{n-1} a_{ik} = -a_{in} > 0$ op D_{n-1} stelling 2 worden toegepast, die ons leert, dat $D_{n-1} > 0$ is in strijd met de onderstelling. Bijgevolg treden er onder de elementen $a_{1n}, \dots, a_{n-1,n}$ enige op, die nul zijn en enige die negatief zijn. Zonder de algemeenheid te schaden, mogen wij aannemen, dat $a_{1n} = \dots = a_{pn} = 0$; $a_{p+1,n} < 0, \dots, a_{n-1,n} < 0$. Hierin is $1 \leq p \leq n-2$.

Beschouw nu de deelmatrix $M = \|a_{ij}\|$ ($i = 1, \dots, p$; $j = p+1, \dots, n-1$) van D_{n-1} . Er zijn nu twee gevallen mogelijk:

1. Zijn alle elementen hiervan nul, dan is de stelling bewezen met $h = p$.
2. Niet alle elementen van M zijn nul.

In D_{n-1} heeft men dan

$$\sum_{k=1}^{p-1} a_{ik} = 0 \text{ voor } i = 1, \dots, p; \quad \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik} > 0 \text{ voor } i = p+1, \dots, n-1.$$

Wegens stelling 3 is dan de hoofdminor D_p van A, bestaande uit de eerste p rijen en kolommen van A gelijk aan nul. Hieruit volgt, dat het uitgesloten is, dat in elke rij van M ten minste één negatief element voorkomt, want was dat wel het geval, dan kon op D_p stelling 2 worden toegepast, die ons zou leren, dat $D_p > 0$ is in strijd met de zoëven gevonden relatie $D_p = 0$. Wij zien dus, dat in M een aantal rijen optreedt, die

louter uit elementen nul bestaan. Zonder de algemeenheid te schaden, mogen wij aannemen, dat $a_{ij} = 0$ voor $i = 1, \dots, p_1$; $j = p_1+1, \dots, n-1$; hierin is $1 \leq p_1 < p$. Er zijn thans weer twee gevallen mogelijk:

1. In de matrix $M_1 = \|a_{ij}\|$ ($i = 1, \dots, p_1$; $j = p_1+1, \dots, p$) zijn alle elementen nul. Dan is de stelling bewezen met $h = p_1$.

2. Niet alle elementen in M_1 zijn nul.

In de hoofdminor D_p bestaande uit de eerste p rijen van A heeft men dan

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{ik} = 0 \text{ voor } i = 1, \dots, p_1; \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik} > 0 \text{ voor } i = p_1+1, \dots, n-1.$$

Negens stelling 3 is dan de hoofdminor D_{p_1} bestaande uit de eerste p_1 rijen en kolommen van A gelijk aan nul. Hieruit volgt, dat het uitgesloten is, dat in elke rij van M_1 ten minste één negatief element voorkomt, want was dat wel het geval, dan kon op D_{p_1} stelling 2 worden toegepast, die ons zou leren, dat $D_{p_1} > 0$ is in strijd met de zoëven gevonden relatie $D_{p_1} = 0$. Wij zien dus dat in M_1 een aantal rijen optreedt, die louter uit elementen nul bestaan. Zonder de algemeenheid te schaden, mogen wij aannemen, dat

$$a_{ij} = 0 \text{ voor } i = 1, \dots, p_2; j = p_1+1, \dots, p; \quad 1 \leq p_2 < p_1.$$

Wij kunnen nu de bovengenoemde redenering voor p_1 herhalen met p_2 . Treedt daarbij weer het geval 2 op, dan vindt men een getal p_3 met

$$a_{ij} = 0 \text{ voor } i = 1, \dots, p_3; j = p_2+1, \dots, p; \quad 1 \leq p_3 < p_2,$$

enz. Het is uitgesloten, dat zo voortgaande steeds geval 2 optreedt, want de getallen $p, p_1, p_2, \dots$ vormen een monotoon dalende rij natuurlijke getallen, die dus moet afbreken. Er is dus een getal s zodanig, dat bij p_s het geval 1 optreedt. Hiermede is de stelling bewezen met $h = p_s$.

Stelling 6. Beschouw een determinant $A = |a_{ij}|$, waarvoor de relaties (1), (5) en

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

gelden. Laat verder gelden

$$a_{ij} = 0 \text{ voor } i = 1, \dots, h; j = h+1, \dots, n, \text{ waarin } 1 \leq h \leq n-1.$$

Dan is $a_{ij} = 0$ voor $i = h+1, \dots, n$; $j = 1, \dots, h$.

Bewijs: Men heeft voor $r = h+1, \dots, n$ en $s = 1, \dots, h$

$$0 \leq a_{rs} \leq \sum_{j=1}^h \sum_{i=h+1}^n a_{ij} = - \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^h a_{ij} = - \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^h a_{ij} = - \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^n a_{ij} = 0.$$

Dus $a_{ij} = 0$ voor $i = h+1, \dots, n$; $j = 1, \dots, h$.

Stelling 7. Beschouw een matrix $A = \|a_{ij}\|$ van de n^e orde, die voldoet aan de relaties (1), (5) en (6). Laat k het grootste natuurlijke getal zijn zodanig, dat de getallen $1, \dots, n$ verdeeld kunnen worden in k disjuncte klassen $I_1, I_2, \dots, I_k$ met $a_{ij} = 0$ voor $i \in I_\lambda, j \in I_\mu$ met $\lambda > \mu$ ($\lambda, \mu = 1, \dots, k$). Dan bezit A de rang $n-k$.

Bewijs: Wij kunnen zo nodig de rijen (en tegelijkertijd de corresponderende kolommen) van de matrix A verwisselen zodanig, dat de relaties (1), (5) en (6) blijven gelden en dat er $k+1$ getallen $m_1, \dots, m_{k+1}$ bestaan met $1 = m_1 < m_2 < \dots < m_k < m_{k+1} = n+1$ zodanig, dat

$$a_{ij} = 0 \text{ voor } i = m_k, \dots, m_{k+1}-1; j = m_{k+1}, \dots, n; k = 1, \dots, k.$$

Uit stelling 6 volgt nu, dat

$$a_{ij} = 0 \text{ voor } i = m_2, \dots, n; j = 1, \dots, m_2-1.$$

Op de hoofdminor van de orde $n-m_2+1$, die uit A ontstaat door daarvan de $1^e, \dots, m_2-1^e$ rijen en kolommen te schrappen, kan stelling 6 nu weer worden toegepast, waaruit volgt, dat ook

$$a_{ij} = 0 \text{ voor } i = m_3, \dots, n; j = m_2, \dots, m_3-1.$$

Zo doorgaande vinden wij dat

$$a_{ij} = 0 \text{ voor } j = m_k, \dots, m_{k+1}-1; i = m_{k+1}, \dots, n; k = 1, \dots, k.$$

Noem de hoofdminor van de orde $r_k = m_{k+1} - m_k$ van A, die uit de rijen (en kolommen) met rangnummer $m_k, \dots, m_{k+1}-1$ bestaat, voortaan N_k . Wij tonen nu aan, dat N_k de rang $r_k - 1$ bezit. Immers aangezien de som der elementen van iedere rij van N_k gelijk is aan nul, is die rang niet $> r_k - 1$ en was die rang $< r_k - 1$, dan kan op N_k stelling 5 worden toegepast (men ziet nl. gemakkelijk in, dat de voorwaarden van stelling 5 vervuld zijn voor N_k), waaruit volgt dat (na zo nodig in N_k rijen en corresponderende kolommen te hebben verwisseld) er een getal s bestaat met $m_{k+1} \leq s \leq m_{k+1}-1$, waarvoor

$$a_{ij} = 0 \text{ voor } j = s, \dots, m_{k+1}-1; i = m_k, \dots, s-1,$$

maar dan was k niet het grootste getal met de in onze stelling genoemde eigenschap.

Vervolgens tonen wij aan, dat, als een minor B van A met een der minoren N_k niet evenveel rijen als kolommen gemeen heeft, deze minor B gelijk is aan nul. Laat nl. B met de minor N_k de rijen met rangnummers $i_1, \dots, i_t$ gemeen hebben en onderstel, dat B met N_k minder dan t kolommen gemeen heeft (in het tegenovergestelde geval bestaat er een andere hoofdminor $N_{k'}$, waarmee B wel meer rijen dan kolommen gemeen heeft). Uit de Laplaceontwikkeling van B naar de rijen met rangnummers $i_1, \dots, i_t$ volgt dan dat $B = 0$ is. Bijgevolg doorsnijdt iedere minor C van A, die niet nul is, elke hoofdminor N_k volgens evenveel rijen als kolommen. Laat C_k de doorsnijding van C en N_k zijn. Dan is $C = C_1 C_2 \dots C_k$, dus elke $C_k \neq 0$. Omdat N_k de rang $r_k - 1$ bezit, is de orde van C en dus de rang van A ten hoogste gelijk aan $\sum_{k=1}^k (r_k - 1) = n - k$. Alweer omdat N_k de rang $r_k - 1$ bezit, bestaat er een dergelijke minor C_k van N_k , die niet nul is en dus een minor C van A van de orde $n - k$, die ook niet nul is.

Laat $A = \|a_{ij}\|$ een matrix zijn, die voldoet aan de eigenschappen (1), (5) en (6). Wij geven thans aan, hoe men de getallen $1, \dots, n$ in k disjuncte klassen $I_1, \dots, I_k$ kan verdelen zodanig, dat

(7) $a_{ij} = 0$ als $i \in I_\lambda$; $j \in I_\mu$ met $\lambda \neq \mu$ ($\lambda, \mu = 1, \dots, k$), waarbij k maximaal is.

Wij kunnen volstaan met een dier klassen aan te geven, want laat men uit A die rijen en kolommen weg, waarvan de rangnummers juist gelijk zijn aan de elementen van die klassen, dan ontstaat uit A een nieuwe matrix, die eveneens voldoet aan (1), (5) en (6) en waarop het aan te geven procédé kan worden herhaald. Daartoe bepalen wij de klasse waartoe een willekeurige der getallen $1, \dots, n$ behoort. Het is duidelijk, dat men zich er toe kan beperken de klasse I te bepalen waartoe het getal n behoort. Wij passen nu op de matrix A hetzelfde procédé toe als in het bewijs van het tweede gedeelte van stelling 5 is geschied. Wij onderscheiden drie gevallen:

1. $a_{in} = 0$ voor $i = 1, \dots, n-1$. Dan bestaat I slechts uit het getal n .
2. Alle a_{in} ($i = 1, \dots, n-1$) zijn $\neq 0$. Dan bestaat I uit de getallen $1, \dots, n$.
3. Niet alle a_{in} ($i = 1, \dots, n-1$) zijn nul. Wij verwisselen nu zo nodig de $1^e, \dots, (n-1)^e$ rij (en tegelijkertijd op corresponderende wijze de $1^e, \dots, (n-1)^e$ kolom) van A zodanig, dat

$$a_{1n} = \dots = a_{pn} = 0; a_{p+1,n} \neq 0, \dots, a_{n-1,n} \neq 0;$$

hierin is nu in tegenstelling met hetgeen gold in het bewijs van genoemde stelling $1 \leq p \leq n-2$.

Op grond van 7, toegepast met $j = n$, moet dan I zeker elk der getallen $p+1, \dots, n$ bevatten.

Beschouw nu de deelmatrix $M = \|a_{ij}\|$ ($i = 1, \dots, p$; $j = p+1, \dots, n-1$) van A . Er zijn nu weer drie gevallen mogelijk:

1. Alle elementen hiervan zijn nul. Dan bestaat I precies uit de getallen $p+1, \dots, n$.
2. In iedere rij van M treedt een element $\neq 0$ op. Dan bestaat I uit de getallen $1, \dots, n$.
3. In M treden zowel rijen op, die geheel uit nullen bestaan, als rijen waarin tenminste één element optreedt dat $\neq 0$ is. Wij verwisselen nu zo nodig de $1^e, \dots, p^e$ rij (en tegelijkertijd op corresponderende wijze de $1^e, \dots, p^e$ kolom) van A zodanig, dat

$$a_{ij} = 0 \text{ voor } i = 1, \dots, p_1; j = p+1, \dots, n-1;$$

bij iedere $i = p_1+1, \dots, p$ bestaat er een natuurlijk getal j , dat voldoet aan $p+1 \leq j \leq n-1$ met $a_{ij} \neq 0$; hierin is $1 \leq p_1 < p$. In dit geval zetten wij het onderzoek op analoge wijze voort.

Het is uitgesloten dat zo voortgaande steeds geval 3. optreedt, want de dan gevonden getallen $p, p_1, p_2, \dots$ vormen een monotoon dalende

rij natuurlijke getallen, die dus moet afbreken.

Opmerking.

Aangezien uit het bovenstaande volgt, dat het procédé, dat leidde tot het vinden van I , ondubbelzinnig bepaald is, is de klasse, waarin het getal n ligt in een klasseindeling van bovengenoemde soort, ondubbelzinnig bepaald. Hiermee is de gewenste ondubbelzinnig bepaalde klasseindeling der getallen $1, \dots, n$ behorende bij A gevonden.